Modellieren lernen – eine Schule macht ernst

Heinz-Jürgen Harder

Modellieren lernt man nicht nebenbei, es bedarf der intensiven Reflexion und Erfahrung auch in komplexeren Problemsituationen. Der Artikel stellt ein Schulkonzept vor, in dem für Klasse 10 ein spezifischer vierteljährlicher Kurs zum Modellieren mit bewährten Aufgaben der systematischen (Weiter-)Entwicklung von Modellierungskompetenzen dient.

Die prozessbezogene Kompetenz des Modellierens soll im Mathematikunterricht angemessen berücksichtigt werden. Diese Forderung ist so alt wie die Feststellung, dass sich zwar kleine Aufgaben leicht in den normalen Unterrichtsgang integrieren lassen, für umfangreichere Fragestellungen jedoch aus mancherlei Gründen nicht immer Raum ist. Am Schulzentrum Findorff in Bremen wurde daher im Rahmen des mathematisch-naturwissenschaftlichen Schulprofils ein zehnwöchiger Projekt-Kurs in der 10. Jahrgangsstufe eingerichtet, in dem die Schülerinnen und Schüler ihre Fähigkeiten zum Modellieren mit offenen Aufgabenstellungen explizit vertiefen können.

Die dabei gemachten Erfahrungen sind auch für den regulären Unterricht interessant und sollen hier vorgestellt werden.

Einstiegsbeispiel

Die in *Abb. 1* abgedruckte Aufforderung (aus Leuders/Maaß 2005) wurde zum einführenden Anlass für vielfältige Schüleraktivitäten zum Modellieren.

Es ging zunächst darum, ein passendes Modell zu finden, das den tropfenden Wasserhahn beschreibt. Hierbei sind Tropfenform und Tropfengröße sowie Tropffrequenz wesentliche Parameter, die von den Schülerinnen und Schülern bestimmt werden mussten.

Der Lösungsweg war nicht vorgegeben und daher beschritten die Schülerinnen und Schüler auch die unterschiedlichsten Wege, mit denen sie die Plausibilität der Aussagen überprüften. Einige machten Annahmen über Tropfengröße und Tropffrequenz, andere bestimmten diese experimentell am Wasserhahn im Klassenraum. Wieder andere berechneten aus den Angaben in den Aussagen eine resultierende Tropfengröße und verglichen diese mit der Realität. Die Tropfenform wurde allgemein als Kugel modelliert, es gab aber auch Schülergruppen, die diese als kleine Würfel angenommen haben. In allen Fällen fiel es den Schülerinnen und Schülern nicht schwer, ihre Ergebnisse mit den Aussagen zu vergleichen und anhand ihrer Beobachtungen zu verifizieren.

Ein Modellierungskurs – Absichten und Rahmenbedingungen

Das Schulzentrum Findorff ist ein typisches Bremer Schulzentrum der Sekundarstufe I. Das bedeutet, dass unter einem Dach Schülerinnen und Schüler in Klassen

Abb. 1: Einstiegsaufgabe

Tropfender Wasserhahn
Im Internet habe ich folgende Aussagen gefunden. Untersucht sie auf ihren Wahrheitsgehalt!

Steter Tropfen höhlt die Börse

- ❐ Ein tropfender Wasserhahn kann bis zu 5.000 Liter im Jahr verschwenden. (baumarkt.de)
- ❐ Ein tropfender Wasserhahn verliert innerhalb von 24 Stunden rund 10 Liter Wasser. (vz-nrw)
- ❐ Bedenkt man, dass eintropfender Wasserhahn bis zu 5.000 Liter Wasser im Jahr verschwenden kann, … (oekotest)
- ❐ Ein tropfender Wasserhahn braucht 45 Liter am Tag (schwechat.gv.at)
- ❐ Ein tropfender Wasserhahn (10 Tropfen pro Minute) verschwendet im Jahr mehr als 2.000 Liter Wasser (hausarbeiten.de)
- ❐ Ein tropfender Wasserhahn (10 Tropfen pro Minute) vergeudet im Monat mehr als rund 170 Liter Wasser, das sind mehr als 2.000 Liter pro Jahr (mvv-live.de)

and the winner is … ;)

- ❐ Ein einziger tropfender Wasserhahn verschwendet im Jahr 20.000 Liter Wasser (miterverein-muenchen)

Chemie	Physik	Biologie	fachübergeifendes Projekt
1. Halbjahr		2. Halbjahr	

Abb. 2: Epochale Organisation der Naturwissenschaften

der Haupt-, Realschule, bzw. Sekundarschule nach der neuen Bremer Schulstruktur, sowie des Gymnasiums unterrichtet werden. Vor etwas mehr als zehn Jahren haben sich die Kolleginnen und Kollegen der Schule (als Reaktion auf eine Abwanderungsbewegung an andere Schulen) dazu entschlossen, dem Schulzentrum ein mathematisch-naturwissenschaftliches Profil zu geben. Äußeres Kennzeichen dieses Profils ist eine Organisation der naturwissenschaftlichen Fächer in Epochen. Hierbei werden die einzelnen naturwissenschaftlichen Fächer ein Quartal (ca. zehn Wochen) lang mit sechs Lehrerstunden unterrichtet. Für eine beliebige Klasse der Realschule oder des Gymnasiums bedeutet das z. B., dass das Schuljahr mit dem Fach Chemie beginnt, nach einem Vierteljahr kommt das Fach Physik, danach Biologie. Es bleibt dann für jede Klasse ein Quartal übrig. In diesem Quartal findet ein fachübergreifender Projektunterricht statt, der schwerpunktmäßig eine Naturwissenschaft ins Zentrum stellt (vgl. *Abb. 2*). Hiefür werden die Klassen in Halbgruppen geteilt, die jeweils zwei Wochenstunden in dem Projekt arbeiten.

In der 7. Klasse liegt der Schwerpunkt auf Biologie, in der 8. Klasse auf Chemie und in der 9. Klasse auf Physik. Für die 10. Klasse fiel die Wahl auf Mathematik, da das Profil der Schule auch diesen Schwerpunkt mit einschließt. Als Thema für diesen Projektunterricht wurde „Modellieren mit Mathematik" gewählt, da hierbei der fachübergreifende Aspekt am ehesten berücksichtigt werden kann. Außerdem sollten die Fertigkeiten und Kenntnisse der Schülerinnen und Schüler in der 10. Klasse so weit ausgebildet sein, dass sie auch komplexere mathematische Probleme bearbeiten können.

Erste Projektphase: Modellieren mit Parabeln

Der Modellierungskurs startet mit der oben beschriebenen Einführungsaufgabe, nach deren Bearbeitung die wesentlichen Teilprozesse des Modellierens explizit herausgearbeitet und bewusst gemacht wurden. Dabei wurden die drei Schritte

- „Problem mathematisieren (modellieren)"
- „im Modell arbeiten (Berechnungen durchführen)"
- „Ergebnis verifizieren / interpretieren"

am Beispiel der Wassertropfen besprochen. Hinzugezogen wurde ein weiteres Beispiel, das zwar wesentlich komplexer ist, aber von den Schülerinnen und Schülern als authentisches Anwendungsproblem akzeptiert wurde, nämlich die Wettervorhersage.

Nach dieser grundlegenden Sensibilisierung für wesentliche Schritte des Modellierungsprozesses erhielten alle Schülerinnen und Schüler in kleinen Gruppen (zwei bis drei Teilnehmer) eine Aufgabe zur Modellierung von Bögen mit Hilfe von Parabeln. Hierbei handelte es sich entweder um Bögen an Objekten (z. B. Brücken) oder um Bewegungskurven (Wurfparabeln). Auch wenn diese Beispiele nicht unmittelbar aus der Lebenswelt der Lernenden stammen, entsprechen sie typischen Fragestellungen aus dem Bereich der Technik, wenn etwa Kurvenverläufe zur Modellierung gekrümmter Flächen von Autokarosserien oder Flugzeugrümpfen oder zur Erzeugung virtueller Realitäten in Computerprogrammen nachgebildet werden. Da die Schülerinnen und Schüler in dieser Altersstufe noch nicht über die üblichen Werkzeuge zur Erzeugung von Spline-Kurven oder Fraktalen verfügen, wurde hier im Kurs die Problemstellung auf parabelförmige Kurven beschränkt, die mit den zur Verfügung stehenden mathematischen Mitteln bereits nachzubilden sind.

Als Hilfe wurde den Schülerinnen und Schülern das Kapitel „Anpassen eines quadratischen Modells an Daten" aus dem Schulbuch „Mathematik – Neue Wege 9" (Lergenmüller / Schmidt 2003, S. 138) zur Verfügung gestellt. Es hat sich dabei gezeigt, dass Schülerinnen und Schüler, die schon vorher im Unterricht mit offenen oder Modellierungsaufgaben konfrontiert

Abb. 3: Wasserfontainen

Modellieren mit Parabeln **Wasserfontainen**

Das oben gezeigte Bild stellt eine Wasserfontaine in einem Ferinpark dar. Die Bögen, die die Wasserfontainen beschreiben, sehen Parabelm sehr ähnlich.

Aufgabe:
Die Fontainenbögen sollen durch Parabeln modelliert werden, d. h. ihr müsst quadratische Funktionsgleichungen finden, so dass die zugehörigen Graphen den Verlauf der Bögen möglichst genau nachbilden.

Abb. 4: Schülerlösung – Poster zu den Wasserfontainen

wurden, deutlich weniger Hilfen benötigten als solche, die dies noch nicht kennen gelernt hatten. Geübte Schülerinnen und Schüler hatten bei den gestellten Aufgaben weniger Fragen zur Wahl des Koordinatensystems, zur Wahl von Punkten oder auch zur Auswahl einer passenden Funktionsgleichung (Scheitelpunkt- oder Nullstellenform). Da ich als Lehrkraft pro Schuljahr vier Klassen hintereinander unterrichte, habe ich in kurzer Zeit einen interessanten Einblick in die Kompetenzen der unterschiedlichen Klassen bekommen. Als Endprodukt zu diesen Aufgaben stellten die Schülerinnen und Schüler dann ein Poster her, auf dem sie ihre Ergebnisse und ihren Weg dahin dokumentierten. Eines dieser Poster ist hier abgebildet *(Abb. 4)*:

Zweite Projektphase: Diverse Aufgaben in Gruppen

In einer zweiten Projektphase bekamen die Schülerinnen und Schüler arbeitsteilig neue Aufgaben. Die Aufgabenauswahl war von der Idee geleitet, möglichst verschiedene inhaltliche Bereiche der den Schülern bisher bekannten Mathematik zu berücksichtigen. Darüber hinaus sollten die Fragestellungen in ihrer Offenheit und Komplexität die Möglichkeit bieten, der unterschiedlichen Leistungsfähigkeit der jeweiligen Schülergruppen gerecht zu werden (Differenzierung). Die Aufgaben umfassten zum Beispiel folgende (nur wenig genauer spezifizierte) Fragen:

- Wie viele Autos stehen im 10 km langen der Stau auf der Autobahn (vgl. Leuders/Maaß 2005)
- Wie lang ist das auf eine Kabeltrommel aufgewickelte Kabel? (vgl. Abb. 5 und Förster / Herget 2002)
- Wie ändert sich der Sauerstoffgehalt in unserem Klassenraum im Laufe einer Unterrichtsstunde? (Koller 1995)
- Halten Zahnpastatuben die Vorgaben für Mogelpackungen ein?
- Wie stapelt man Sauerkrautdosen am besten? (Leuders 2005)

Das Kabeltrommelproblem hat seinen Reiz darin, dass viele konkurrierende Modellierungen der Kabellagen möglich sind (über Kreisringe, Spiralen, Kabellage auf Lücken, ohne Lücken usw., vgl. *Abb. 5*), deren Angemessenheit auf den ersten Blick nicht endgültig beurteilt werden kann.

Eine Schülergruppe näherte sich dem Problem sehr praktisch (vgl. *Abb. 6*). Sie erzeugte ein Modell, indem sie ein verkleinertes Abbild einer Kabeltrommel bastelten und dabei erkannten, dass jede Lage der Schraubenlinie (Helix) beim Aufwickeln eine andere Orientierung hat, also das Modell, dass die Lagen „auf Lücke" angeordnet sind, unrealistisch ist (vgl. *Abb. 6*).

Auch um festzustellen, ob eine Zahnpastatube eventuell eine „Mogelpackung" ist, begründeten zwei Schülerinnen ebenfalls ihren Modellierungsansatz durch praktische Vorversuche (vgl. *Abb. 7*).

Abb. 5: Wie lang ist das Kabel auf der Kabeltrommel?

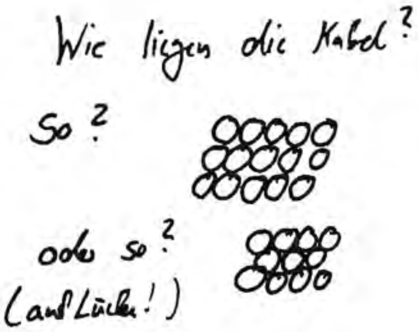


Abb. 6: Versuch zur Wicklung einer Kabeltrommel

Die Aufgabenstellung zum Stapelungsproblem der Sauerkrautdosen lautete so: „Die Firma Siebenkraut hat einen neuen Markt aufgetan: Die Japaner entwickeln einen Heißhunger auf deutsches Sauerkraut.

- Welche Stapelmöglichkeiten gibt es für die Dosen auf einer Europalette?
- Welche Dosengrößen und -formate sind möglich und sinnvoll und wie hängt die transportierbare Sauerkrautmenge vom Dosenformat ab?
- Mit welchem Verpackungsvolumen für den Transport in einem Container ist zu rechnen?"

Für die weiteren Versuche benötigten wir die Messwerte unserer Versuchstuben. (die Länge l, und den Umfang U)

- Colgate: l =15cm, U =9cm (V=75ml)
- Odol med 3: l =15,5cm, U =9cm (V=75ml)
- Perlodent: l =14,2cm, U =11,2cm (V=100ml)
- Perlodent mini: l =8,6cm, U =7,1cm (V=20ml)

<u>Wie kann das Volumen rechnerisch bestimmt werden?</u>

Unsere Idee war, dass wenn man die Schweißkannte der Tube abschneidet, die Form eines Zylinders erhält.

Der Pfalzrand wird ganz knapp abgeschnitten

Jedoch ist dieser nicht bis oben Gefüllt sondern in den meisten Fällen ca. 85% (der Länge).

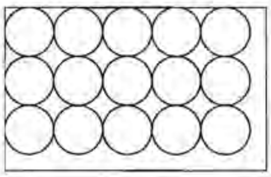
Unsere Messwerte für die Länge (bis wohin gefüllt war):
- Colgate: l =15cm, gefüllte l =13cm
- Odol med 3: l =15,5cm, gefüllte l =13cm
- Perlodent: l =14,2cm, gefüllte l =10,5cm
- Perlodent mini: 8,6cm, gefüllte l =6,5cm

Da wir von Markenzahnpastatuben ausgehen, konnten wir somit die 90% der befüllten Länge festlegen (Bei den Billigmarken war die Tube im noch verschlossenem Zustand nicht maximal gefüllt, und ist daher mit der hergeleiteten Formel nicht genau zu berechnen.)

Abb. 7: Vorversuche zum Volumen einer Zahnpastatube (Schülerlösung)

<u>Stapelmöglichkeiten</u>

Variante I



b = 80cm

a = 120cm

Ordnet man die Dosen nach der Variante 1 an, passen auf die Länge a 5,1 Dosen und auf die Länge b 3,4 Dosen. Somit könnte man insgesamt 15 Dosen als 1. Lage auf die Palette stellen.

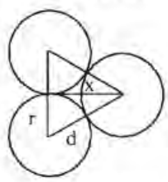


Abb.1

Um heraus zu finden wie viele Dosen mit der Variante 2 auf eine Palette passen, muss man zunächst „x" berechnen (siehe Abb.1):

$x^2 + r^2 = d^2 \quad | - r^2$
$x^2 = d^2 - r^2$
$x^2 = 23{,}4^2 - 11{,}7^2$
$x^2 = 410{,}67 \quad | \sqrt{}$
$x \approx 20{,}3$ cm

Dann zieht man zweimal den Radius einer Dose (11,7 cm) von der Gesamtlänge einer Palette (120 cm) ab (In der Zeichnung orange markiert).
In diesem Fall bleibt dann die Länge von 96,6 cm über. Diese Zahl teilt man durch „x":

$$\frac{96{,}6}{20{,}3} = 4{,}8$$

Das heißt, man bekommt zweimal den Radius einer Dose und viermal die Länge „x" (in der Zeichnung rot markiert) auf einer Palette unter, was einer Dosenanzahl von 13 entspricht (siehe Abb.2). Wie man sieht, ist Variante 1 sinnvoller.

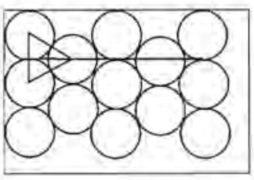


Abb.2

Abb. 8: Lauras und Julias Untersuchung der Anordnung von Dosen auf einer Europalette

Für die Schülerinnen und Schüler bestand die Aufgabe in dieser Unterrichtsphase darin, eine Ausarbeitung über ihren Lösungsweg und ihr Ergebnis anzufertigen, sowie am Ende ein Referat vor der Klasse zu ihrem Thema zu halten. Auch hier waren die Aufgabenstellungen offen gehalten, es wurden nur wenige initiierende Fragestellungen formuliert.
In einer ersten Phase sollten die Schülerinnen und Schüler ihre Fragestellungen spezifizieren und möglichst einen Arbeitsplan mit Zielen erstellen. Dies ist in Klassen problematisch, die in freien Arbeitsformen und offenen Fragestellungen nicht geübt sind.
Hier muss man sich zunächst darauf beschränken, die Aufgabenstellung mit den Gruppen im Gespräch zu präzisieren, d.h. gemeinsam im Dialog mit der Gruppe die Offenheit der Aufgabenstellung einzuschränken und konkretere Fragestellungen zu entwickeln. So wurde eine Gruppe bei ihrer Bearbeitung der offenen Fragestellung zum Stau auf der Autobahn erst arbeitsfähig, nachdem ich nach der Länge eines Autos, dem Abstand zwischen den Autos und nach der Art (PKW, LKW, Bus) der Autos im Stau fragte. Eine noch weitergehende Hilfestellung wäre, mit der Gruppe die Vorgehensweise zur Bestimmung der Parameter zu planen.
Nach dieser Phase arbeiteten die Gruppen unabhängig an ihrer Aufgabenstellung. Als Lehrer ließ ich mich dabei von den Gruppen über den aktuellen Stand der Arbeit informieren.
Im weiteren Verlauf der Erarbeitung zeigte sich, dass eher schwächere Gruppen dazu neigten, sich schon mit wenigen Ergebnissen zufrieden zu geben. In dieser Situation war es hilfreich, als Lehrkraft weitere, konkrete Fragestellungen vorzugeben.
Hin und wieder war es notwendig, Hinweise auf ein passendes mathematisches Werkzeug zu geben. Je nach mathematischer Vorbildung konnte dieses aus einem knappen Stichwort oder einer ausführlicheren Anleitung bestehen.

Die in *Abb. 8* und *Abb. 9* abgedruckten Ergebnisse zum „Sauerkraut-Projekt“ stammten von den Schülerinnen Julia und Laura aus meiner Klasse. Ihnen reichte der Hinweis auf minimalen Materialverbrauch bei den Dosen, dann bearbeiteten sie (in Klasse 10) eine Extremwertaufgabe, so wie sie es im Rahmen der Körperberechnungen im Mathematikunterricht gelernt hatten. Zur Verfügung stand ihnen ein Computer-Algebra-System in Form des TI-Voyage200.
Neben dem Materialverbrauch untersuchten die Schülerinnen auch die Anordnung der Dosen auf einer Palette, um auch hier den günstigsten Fall zu finden:
In ihrer insgesamt 16-seitigen, computergeschriebenen Ausarbeitung haben sie die Untersuchung für verschiedene Dosenformate und Anordnungen auf der Palette durchgeführt, und am Ende eine Empfehlung abgegeben (vgl. Abb. 9).

Vergleich aller Dosenformate

Beispiel	Volumen	Durchmesser	Höhe	Oberfläche	Gebrauchtes Weißblech pro Dose	Befördertes Sauerkraut gesamt in Liter
1	10 Liter	23,4 cm	23,3 cm	2569,5 cm²	102,78 cm³	20250
2	10 Liter	20,6 cm	30,0 cm	2608,0 cm²	104,32 cm³	15750
3	**10 Liter**	**20,0 cm**	**31,8 cm**	**2626,4 cm²**	**105,00 cm³**	**21600**
4	10 Liter	10,0 cm	127,3 cm	4156,3 cm²	166,25 cm³	14700

Wir empfehlen Beispiel 3, da man mit diesem Dosenformat die größte Sauerkrautmenge im Container befördert. Auch wenn das gebrauchte Weißblech pro Dose mehr ist als bei den Beispielen 1 und 2 - die Zahlen weichen nicht sehr weit von einander ab. Beispiel 4 ist überhaupt nicht empfehlenswert, da die Dosen unhandlich sind, vergleichsweise wenig Sauerkraut befördert wird und der Weißblechbedarf sehr hoch ist. Wenn man das Dosenformat von Beispiel 3 zu unhandlich findet, empfehlen wir Beispiel 1.

Abb. 9: Lauras und Julias Zusammenfassung der Untersuchung zum Dosenproblem

Schlussbemerkung
Ein solcher Projektunterricht bietet die Möglichkeit, die prozessbezogene Kompetenz Modellieren mit Mathematik an größeren, vom aktuellen Stoff unabhängigen Beispielen aufzubauen. Für Klassen, die diesen Ansatz bisher aus ihrem traditionellen Mathematikunterricht noch nicht erfahren haben, ist es eine Chance, eine Einführung in das Modellieren zu erhalten.
Zwar sollte Modellieren als eine zentrale prozessbezogene Kompetenz den ganzen Mathematikunterricht durchziehen, sie kann aber – z. B. in einem solchen Projekt-Kurs – auch phasenweise im Vordergrund stehen. Schülerinnen und Schüler lernen auf diese Weise nicht nur zu modellieren, sondern denken auch explizit über das Modellieren nach.
Das vorgestellte Projekt zeigt, wie sich der Mathematikunterricht streckenweise einbinden lässt in ein Gesamtkonzept von mathematisch-naturwissenschaftlicher Bildung.

Literatur
Büchter, A. / Leuders, T. (2005): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen, Cornelsen Scriptor, Berlin.
Förster, F. / Herget, W. (2002): Die Kabeltrommel. Glatt gewickelt – gut entwickelt, in: Mathematik Lehren 113, S. 48–52.
Koller, D. (1995) (Hrsg.): Simulation dynamischer Vorgänge, Klett, Stuttgart.
Lergenmüller, A. / Schmidt, G. (2003) (Hrsg.): Mathematik – Neue Wege 9, Arbeitsbuch für Gymnasien, Schroedel Verlag, Hannover
Leuders, T. (2005): Denkzettel „Sauer macht erfinderisch“, in: PM 47 (3), S. 42–43.
Leuders, T. / Maaß, K. (2005) (Hrsg): Modellieren bildet ..., PM 47 (3).

Quellennachweis Abb. 5
© Bagela Kabeltrommel- und Containertransportwagen Typ BKT 60

Heinz-Jürgen Harder,
Landesinstitut für Schule und
Schulzentrum Findorff, Bremen
schule@harderweb.de