

## Hauptseminar 31 - Fachdidaktisches Seminar für Mathematik

# Größen

Heinz-Jürgen Harder  
 Fachleiter für Mathematik

März 2011

## 1 Grundlagen

Grundlage jeder Messung ist eine *Maßeinheit*. Ohne Festlegung einer Maßeinheit ist jeder Messvorgang sinnlos. Zur historischen Entwicklung der Maßeinheiten gibt es in der Literatur eine Reihe von Quellen, z.B. die Bücher von Guedj (1987) oder Trapp (1998).

Jede physikalische Größe, dazu gehören auch die im Mathematikunterricht betrachteten Größen:

- *Länge*
- *Gewicht*  
(*eigentlich im strengen Sinn Masse*)
- *Zeit*
- *Flächeninhalt und*
- *Volumen*

wird immer durch eine *Maßzahl* und eine *Maßeinheit* beschrieben. Im allgemeinen geschrieben in der Form:

**Definition 1** Für eine Größe gilt:  
*Größe = Maßzahl · Maßeinheit*  
 kurz:  $G = MZ \cdot ME$

**Beispiel 1**  $Länge = 2,44 \cdot 1 \text{ Meter}$ , kurz:  
 $l = 2,44 \text{ m}$  bei der Wahl einer anderen Maßeinheit gilt für die gleiche Größe:  
 $Länge = 8 \cdot 1 \text{ foot}$ , kurz:  $l = 8 \text{ ft}$

Das heißt, beim Übergang von der Maßeinheit 1 Meter zur Maßeinheit 1 foot wird die Maßzahl für die gleiche Länge an die neue Maßeinheit angepasst. Hieraus ergibt sich sofort der Zusammenhang:

<sup>1</sup>Zur Definition der Maßeinheiten findet man viele Informationen bei der Physikalisch Technischen Bundesanstalt (PTB): <http://www.ptb.de/de/wegweiser/einheiten/index.html>

**Satz 1** *Messen ist immer der Vergleich der zu messenden Größe mit einer definierten Maßeinheit. Die Maßzahl (MZ) gibt das Verhältnis zwischen der Größe (G) und der Maßeinheit (ME) an:*

$$MZ = \frac{G}{ME}$$

## 2 Längenmessung

Auf die Längenmessung angewendet ist es sofort einsichtig, dass der Messvorgang so abläuft, da ja ein Maßstab (Maßband, Gliedermaßstab (auch *Zollstock* genannt) u.v.a.) die definierten Maßeinheiten enthält und durch anlegen an die zu messende Länge der Vergleich ganz offensichtlich vorgenommen wird.

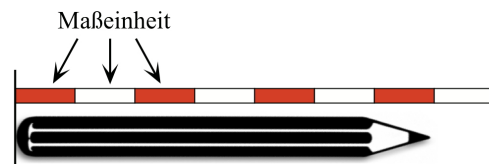


Abbildung 1: Längenmessung durch Vergleich mit einem Maßstab

Für die Längenmessung gibt es, historisch bedingt, verschiedene Maßeinheiten. Seit der Französischen Revolution (1789) hat sich die Längenmaßeinheit 1m als Basiseinheit durchgesetzt. Die aktuelle Definition des Meters lautet<sup>1</sup>:

**Definition 2** vom 20. Oktober 1983:  
*Ein Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Zeit von  $\frac{1}{299.792.458}$  Sekunden zurücklegt.*

Mit dieser Definition basiert die Basiseinheit

der Längenmessung auf einer zweiten Maßeinheit, nämlich der *Sekunde* als Basiseinheit der *Zeit*. Aus diesem Grund gehe ich zunächst auf die Zeitmessung ein.

### 3 Zeiten messen

Eine besondere Größe ist die Zeit, da man für die *Zeit* keine einfache natürliche Maßeinheit findet wie z.B. für die Längenmessung. Da die *Zeit* jedoch mit periodischen Vorgängen in der Natur wie z.B. Tag-Nacht-Wechsel, dem Wechsel der Jahreszeiten oder periodischen Veränderungen des Sternenhimmels zusammenhängt, ist es naheliegend über diese Phänomene eine Maßeinheit für die *Zeit* zu definieren. So wurde die Maßeinheit 1 Sekunde ursprünglich am *Sonnentag*, das ist der Zeitabstand zwischen zwei Sonnenhöchstständen (Mittag) definiert. Die Definition lautete:

**Definition 3** Eine Sekunde ist  $\frac{1}{86.400}$  eines Sonnentages.

Dieses konnte mit relativ einfachen Mitteln, wann ist z.B. der Schatten bei einer Sonnenuhr am kürzesten, bestimmt werden. Die noch heute gültige Zeiteinteilung nach dem 60er-System geht auf das alte babylonische Zahlensystem zurück. Dieses 60er-System ist darüber hinaus auch noch bei der Winkelmessung erhalten geblieben. Der Grund dafür ist, dass sowohl die Zeit- als auch die Winkelmessung in der Astronomie eine große Rolle spielen. Da die Griechen das astronomische Wissen der Babylonier übernommen haben, haben sie auch gleichzeitig für diese beiden Wissensbereiche das Zahlensystem mit übernommen. Versuche, auch dieses in eine dezimale Zeitmessung zu überführen, schlugen in der Geschichte fehl. Näheres dazu findet man in dem Buch von von Hahn (1984).

Die aktuelle Definition der Sekunde ist nicht mehr an astronomischen Phänomenen sondern an regelmäßig ablaufenden Vorgängen im atomaren Bereich angelehnt:

**Definition 4** Seit 1967 gilt:  
Die Sekunde ist das 9.192.631.770-fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids  $^{133}\text{Cs}$  entsprechenden Strahlung.

Alle Geräte zur Zeitmessung (Uhren, Chronometer) besitzen heute Bauteile, die mit hoher Frequenz schwingen und so ein periodisches Signal erzeugen, das zur Zeitmessung benutzt werden kann.

### 4 „Gewichte“ messen

Der Begriff *Gewicht* wird umgangssprachlich für die physikalische Größe *Masse* benutzt. In der Physik bezeichnet *Gewicht* eine *Kraft*, deren Ursache die Gravitation ist, worunter man das Phänomen versteht, dass sich zwei Körper mit ihren Massen gegenseitig anziehen. Die Maßeinheit für die Masse ist das Kilogramm und es gilt:

**Definition 5** Das Kilogramm ist die Einheit der Masse; es ist gleich der Masse des Internationalen Kilogrammprototyps.

Auch beim Messen von Massen wird i.a. ein Vergleich mit einer Maßeinheit durchgeführt. Wenn auf einer Balkenwaage die Masse eines Körpers bestimmt wird, so geschieht das im Vergleich zu Körpern deren Masse genau einer Einheit (z.B. 1 kg), bzw. eines Vielfachen einer Einheit, entspricht:

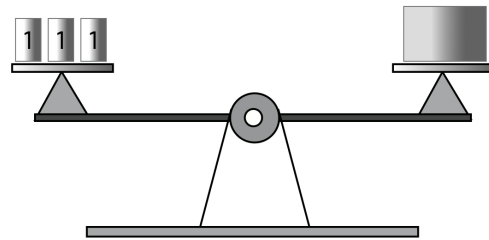


Abbildung 2: Massenbestimmung durch Vergleich mit einer Balkenwaage

Hierbei wird allerdings die *Masse* über das Gleichgewicht der *Gewichtskräfte* am gleichen Ort bestimmt.

### 5 Flächen messen

Auch bei der Flächenmessung gilt der unter Definition 1 beschriebene Zusammenhang. Als Maßeinheit wählt man das *Einheitsquadrat*. Bezugnehmend auf das Längenmaßsystem definiert man das Einheitsquadrat folgendermaßen:

**Definition 6** Die Maßeinheit der Flächenmessung ist das Einheitsquadrat. Es hat den Flächeninhalt eines Quadrates mit einer Seitenlänge von 1 m. Der Name der Maßeinheit lautet 1 Quadratmeter kurz:  $1\text{ m}^2$ .

Formelzeichen für die Größe *Flächeninhalt* ist der Großbuchstabe *A*. Spezielle Flächen sollten mit einem Index gekennzeichnet werden (z.B.  $A_G$  für die Grundfläche eines Körpers).

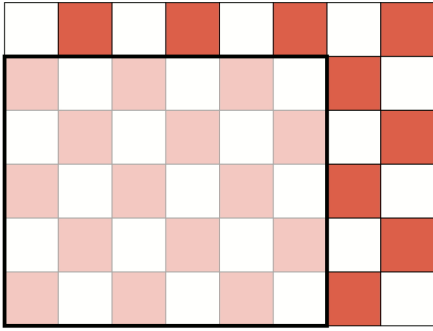


Abbildung 3: Rechteckfläche mit „Flächenmaßstab“ aus *Einheitsquadraten*

**Beispiel 2** Die in Abbildung 3 gezeichnete dick umrandete Fläche besitzt demnach einen Flächeninhalt von  $A = 30 \cdot 1 \text{ m}^2$ , da sie gerade 30 Einheitsquadrate mit dem Flächeninhalt  $1 \text{ m}^2$  abdeckt. Zur Berechnung des Flächeninhalts zählt (misst) man die Anzahl der Einheitsquadrate in einer Reihe und multipliziert diese mit der gezählten (gemessenen) Anzahl der Reihen. Hier also 6 Einheitsquadrate pro Reihe in 5 Reihen:

$$A = \underbrace{6}_{\text{pro Reihe}} \cdot \underbrace{5}_{\text{Reihen}} \cdot 1 \text{ cm}^2$$

$$A = 30 \cdot 1 \text{ cm}^2$$

oder kurz:

$$A = 30 \text{ cm}^2$$

Zu beachten ist, dass die Rechnung hier nicht, wie man sie oft verkürzt findet, lautet:

$$A = 6 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 30 \text{ cm}^2$$

Dieses würde die Übertragung auf unregelmäßig geformte Flächen sehr erschweren. Wie sollte sonst die Berechnung der dick umrandeten Fläche in folgenden Bild bestimmt werden?

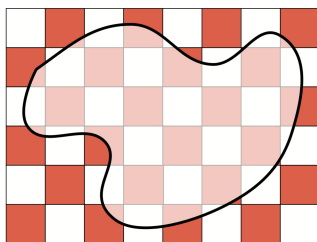


Abbildung 4: unregelmäßig begrenzte Fläche mit „Flächenmaßstab“ aus *Einheitsquadraten*

Um bei Schülerinnen und Schülern das Bewusstsein für die Flächenmessung mittels *Einheitsquadraten* zu stärken, sollten immer wieder Flächenmessungen über das Auszählen von „Kästchen“ durchgeführt werden.

## 6 Volumen messen

Als Maßeinheit für das Volumen wählt man den Einheitswürfel. Auch hier wird auf das Längenmaßsystem Bezug genommen und man definiert den Einheitswürfel wie folgt:

**Definition 7** Die Maßeinheit der Volumemessung ist der Einheitswürfel. Es ist ein Würfel mit einer Kantenlänge von 1 m. Der Name der Maßeinheit lautet 1 Kubikmeter kurz:  $1 \text{ m}^3$ .

Formelzeichen für die Größe Volumen ist der Großbuchstabe  $V$ . Analog zur Flächenberechnung besitzt der gezeichnete Körper ein Volumen von

$$V = 240 \cdot 1 \text{ cm}^3$$

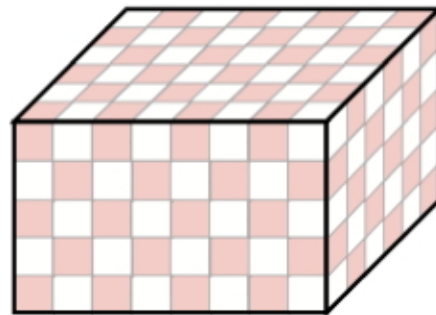


Abbildung 5: Quader mit „Volumenmaßstab“ aus *Einheitswürfeln*

Er enthält also 240 Einheitswürfel mit dem Volumen  $1 \text{ cm}^3$ . Zur Berechnung des Volumens zählt (misst) man die Anzahl der Einheitswürfel in einer Reihe und multipliziert diese mit der gezählten (gemessenen) Anzahl der Reihen. Dieser Würfel enthält also in 6 Reihen 8 Einheitswürfel pro Reihe. Danach bestimmt man die Anzahl der Schichten und multipliziert mit dieser Zahl:

$$V = \underbrace{8}_{\text{pro Reihe}} \cdot \underbrace{6}_{\text{Reihen}} \cdot \underbrace{5}_{\text{Schichten}} \cdot 1 \text{ cm}^3$$

$$V = 240 \cdot 1 \text{ cm}^3$$

oder kurz:

$$V = 240 \text{ cm}^3$$

Wichtig: Ebenso wie bei der Flächenberechnung gilt auch bei der Volumenberechnung nicht:

$$V = 8 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 240 \text{ cm}^3$$

wie oft fälschlich angegeben wird.

## 7 Bruchteile und Vielfache von Maßeinheiten

Für alle Maßeinheiten werden mit Hilfe des Dezimalsystems Bruchteile und Vielfache der Basismaßeinheiten gebildet.

Bei den Flächen und Volumenmaßen wird die Operation auf die Kantenlängen angewendet, so dass sich bei den Flächenmaßen die Umrechnungszahl 100 und bei den Volumenmaßen die Umrechnungszahl 1000 ergibt.

Bei der Zeit werden die Vielfache der Sekunde im klassischen 60er-System gebildet

### Literatur

- [Guedj 1987] GUEDJ, Denis: *Die Geburt des Meters*. Campus Verlag, 1987
- [von Hahn 1984] HAHN, Gernot von: *Jahre - Tage - Stunden, Das große Buch von Zeit und Kalender*. AT Verlag, Aarau/Schweiz, 1984
- [PTB 2001] PTB: Dimensionen der Einheiten. In: BUNDESANSTALT, Physikalisch-Technische (Hrsg.): *maßstäbe* Bd. 1. Physikalisch-Technische Bundesanstalt Braunschweig und Berlin, 2001
- [Trapp 1998] TRAPP, Wolfgang: *Kleines Handbuch der Maße, Zahlen, Gewichte und der Zeitrechnung*. Komet Verlagsgesellschaft, 1998