

Hauptseminar 31

Fachdidaktik Mathematik

Aufgabenkultur im Mathematikunterricht

Heinz-Jürgen Harder

Fachleiter für Mathematik

Aufgaben-
kultur

Heinz-Jürgen
Harder



Bild zu einem Artikel über die
PISA-Tests im Spiegel Nr. 29/2005

Aus einem älteren
Schulbuch für die 8. Klasse

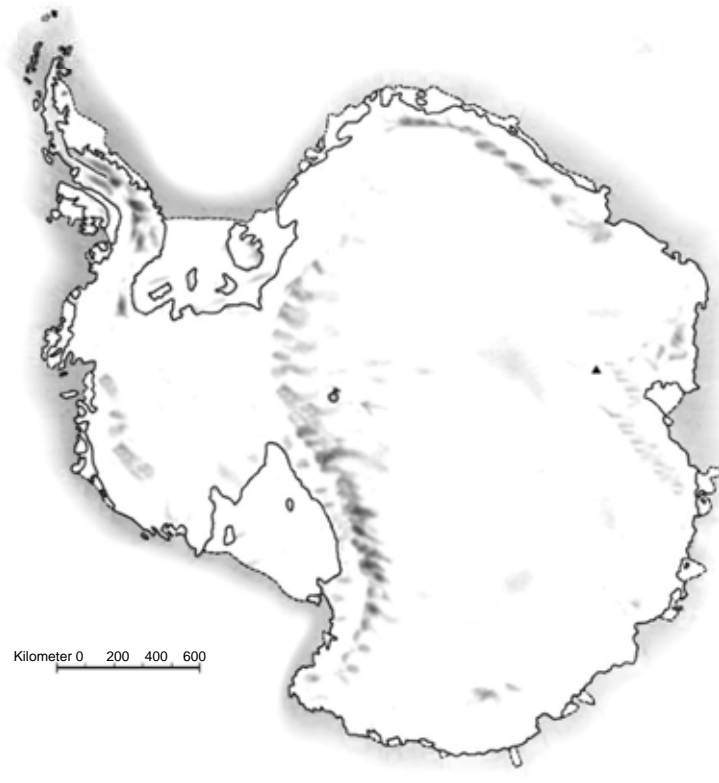
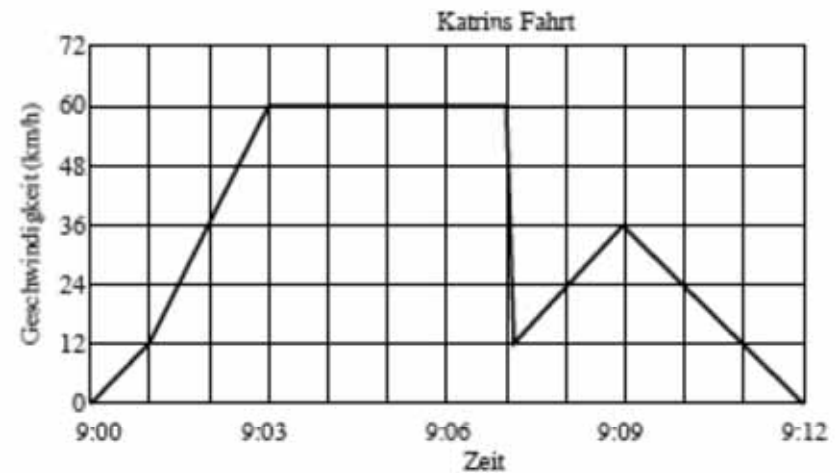
<p>22. Berechne.</p> <p>a) $\frac{a}{b} + 1$ b) $\frac{a}{b} - 2$ c) $\frac{a^2}{b} + a$</p> <p>d) $a - \frac{b}{a}$ e) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ f) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$</p> <p>g) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ h) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{5x}$ i) $\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{3x^3}$</p> <p>k) $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc}$ l) $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ m) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$</p> <p>23. Berechne.</p> <p>a) $\frac{a+b}{2} - b$ b) $\frac{3a-5b}{4b} + 2$</p> <p>c) $\frac{a+b}{2a} - 1$ d) $\frac{a}{a-b} - 1$</p> <p>e) $1 - \frac{a}{a+b}$ f) $2 + \frac{3y}{2x-y}$</p> <p>g) $\frac{a-2b}{2} + \frac{a+3b}{3}$ h) $\frac{3a+7b}{9b} - \frac{4a+9b}{12b}$</p> <p>i) $\frac{8}{5x+5} - \frac{3}{2x+2}$ k) $\frac{1}{3x+6} + \frac{3}{4x+8}$</p> <p>l) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ m) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3}$</p> <p>24. Berechne.</p> <p>a) $\frac{1}{x+y} + \frac{x}{(x+y)^2}$ b) $\frac{1}{x-y} - \frac{y}{(x-y)^2}$</p> <p>c) $\frac{1}{x^2+xy} - \frac{1}{(x+y)^2}$</p> <p>d) $\frac{1}{xy-y^2} + \frac{1}{(x-y)^2}$</p> <p>e) $\frac{2}{x+y} - \frac{x}{x^2-y^2}$ f) $\frac{3}{x-y} + \frac{y}{x^2-y^2}$</p> <p>g) $\frac{x+3}{x-1} - \frac{x-3}{x+1} - \frac{2x}{x^2-1}$</p> <p>h) $\frac{2x+3}{2x-2} - \frac{3x-2}{3x+3} - \frac{5}{6x^2-6}$</p> <p>i) $\frac{5}{a+b} - \frac{4}{a-b} + \frac{9b}{a^2-b^2}$</p> <p>k) $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$</p>	<p>25. Berechne.</p> <p>a) $\frac{1}{ab} \cdot a^2$ b) $\frac{4a}{9b^2} \cdot 12ab$</p> <p>c) $\frac{3x}{4yz} \cdot 5xyz$ d) $\frac{1}{ab} \cdot b$</p> <p>e) $\frac{1}{a-b} \cdot (a-b)^2$ f) $\frac{1}{a+b} \cdot (a^2-b^2)$</p> <p>g) $\frac{2a-4b}{3a+b} \cdot \frac{9a^2-b^2}{(a-b)^2}$ h) $\frac{a^2+ab}{b} \cdot \frac{b}{a^2}$</p> <p>i) $\frac{a^2-1}{a+2} \cdot \frac{a^2-4}{a+1}$</p> <p>26. Berechne.</p> <p>a) $\frac{a}{b} : \frac{a}{b}$ b) $\frac{3x}{4y} : \frac{4x}{3y}$</p> <p>c) $\frac{a^2}{b^2} : \frac{a}{b}$ d) $\frac{8xy}{9z^2} : \frac{4x^2}{15yz}$</p> <p>e) $\frac{1}{a+b} : \frac{1}{(a+b)^2}$ f) $\frac{a+b}{a-b} : (a^2-b^2)$</p> <p>g) $\frac{a^2+ab}{b} : \frac{a^2-b^2}{b^2}$</p> <p>27. Multipliziere aus.</p> <p>a) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot ab$</p> <p>b) $(x^2+2x) \cdot \frac{1}{x}$</p> <p>c) $\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \cdot x^2$</p> <p>d) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \cdot abc$</p> <p>e) $\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \cdot a^2 b^2 c^2$</p> <p>f) $(a+b) \cdot \frac{1}{c}$</p> <p>g) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot (a+b)$</p> <p>h) $\left(1 + \frac{b}{a}\right) \cdot \left(\frac{a}{b} - 1\right)$</p>
---	--

Aufgaben-
kultur

Heinz-Jürgen
Harder

TIMSS-Beispielaufgabe:

Katrin hat eine Fahrt mit ihrem Auto unternommen. Unterwegs lief ihr eine Katze vor das Auto. Katrin bremste scharf, und die Katze entkam. Leicht erschrocken entschied sich Katrin, nach Hause zu fahren. Sie nahm dabei eine Abkürzung. Die folgende Grafik zeigt die Geschwindigkeit des Autos während dieser Fahrt.



PISA-Beispielaufgabe (2000):

Schätze die Fläche der Antarktis, indem du den Maßstab der Karte benutzt.

Schreibe deine Rechnung auf und erkläre, wie du zu deiner Schätzung gekommen bist. (Du kannst in der Karte zeichnen, wenn dir das bei deiner Schätzung hilft.)

gelöst:	ganz / teilweise	garnicht
D	40 %	39 %
NL	62 %	10 %
ITA	20 %	69 %

Mathematikaufgaben

dienen einerseits der Vermittlung bzw. Erarbeitung von allgemeinen und fachbezogenen Kompetenzen und dem Üben und Wiederholen von Inhalten und Fertigkeiten.

Aufgaben zum Lernen

- Erkunden, Entdecken und Erfinden
- Sammeln, Sichern, Systematisieren
- Üben und Wiederholen

Mathematikaufgaben

dienen andererseits der Überprüfung, ob die Standards bezüglich der allgemeinen und fachspezifischen Kompetenzen erreicht wurden.

Aufgaben zum Leisten

- Kompetenzorientierte Diagnose
- Leistungsbewertung
- Kompetenzen erfahrbar machen

Beim Bearbeiten von Aufgaben finden mathematische Prozesse statt und die diesbezüglichen Kompetenzen werden ausgebildet.

Aufgaben sind Anlässe zum „Mathematik treiben“

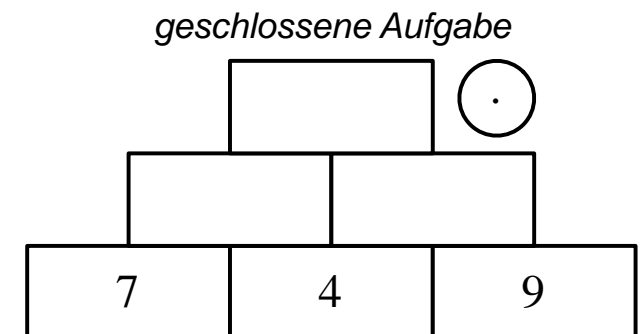
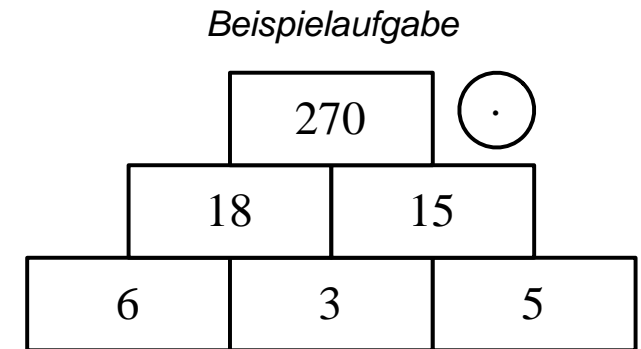
- Modellieren
- Problemlösen
- Argumentieren
- Begriffe bilden

Merkmale geeigneter Aufgaben:

- Authentizität
- Offenheit
- Differenzierungsvermögen

Klassifizierung von Aufgabentypen*,
nach dem was gegeben (X) und dem was gesucht (?) ist.

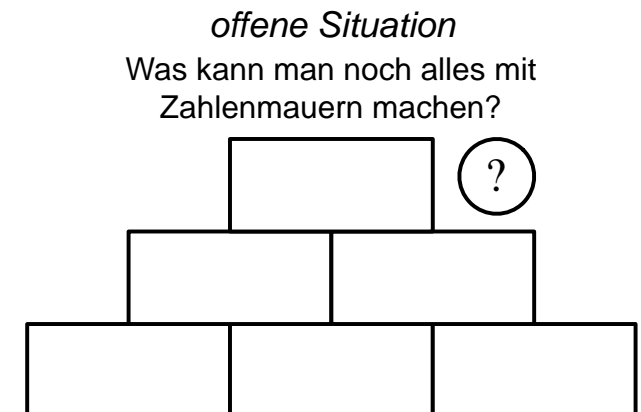
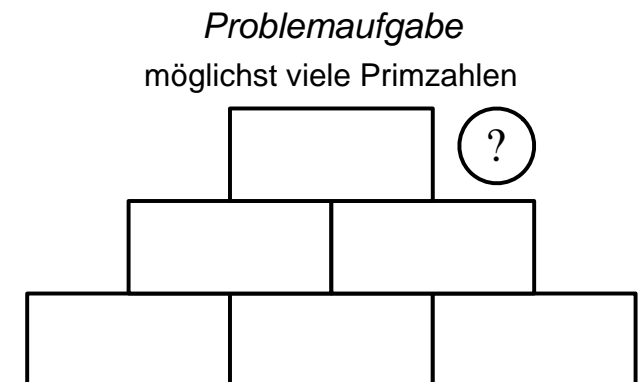
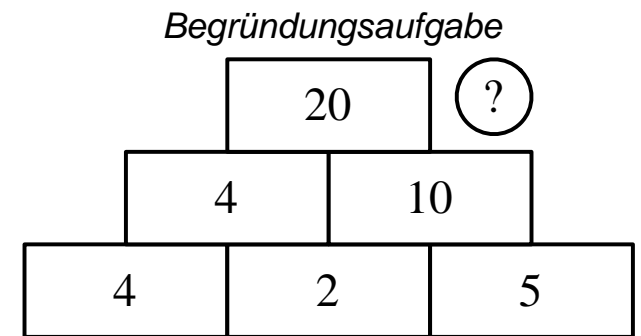
Start <i>Situation Information</i>	Weg <i>Methode Verfahren</i>	Ziel <i>Ergebnis Lösung</i>	Aufgabentyp
X	X	X	<i>Beispielaufgabe</i>
X	X	?	<i>geschlossene Aufgabe</i>



*nach Bruder, zitiert nach: Büchter, Leuders: Mathematikaufgaben selbst entwickeln, Cornelsen - Scriptor, 2005

Klassifizierung von Aufgabentypen*,
nach dem was gegeben (X) und dem was gesucht (?) ist.

Start <i>Situation Information</i>	Weg <i>Methode Verfahren</i>	Ziel <i>Ergebnis Lösung</i>	Aufgabentyp
X	X	X	<i>Beispielaufgabe</i>
X	X	?	<i>geschlossene Aufgabe</i>
X	?	X	<i>Begründungsaufgabe</i>
X	?	?	<i>Problemaufgabe</i>
?	?	?	<i>offene Situation</i>

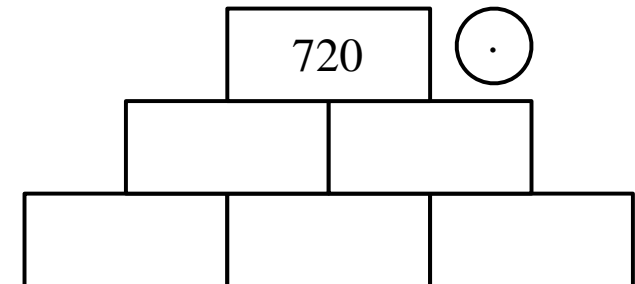


*nach Bruder, zitiert nach: Büchter, Leuders: Mathematikaufgaben selbst entwickeln, Cornelsen - Scriptor, 2005

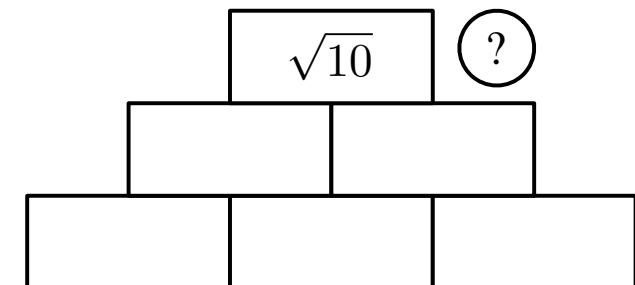
Klassifizierung von Aufgabentypen*,
nach dem was gegeben (X) und dem was gesucht (?) ist.

Start <i>Situation Information</i>	Weg <i>Methode Verfahren</i>	Ziel <i>Ergebnis Lösung</i>	Aufgabentyp
X	X	X	<i>Beispielaufgabe</i>
X	X	?	<i>geschlossene Aufgabe</i>
X	?	X	<i>Begründungsaufgabe</i>
X	?	?	<i>Problemaufgabe</i>
?	?	?	<i>offene Situation</i>
?	X	X	<i>Umkehraufgabe</i>
?	?	X	<i>Problemumkehr</i>
?	X	?	<i>Anwendungssuche</i>

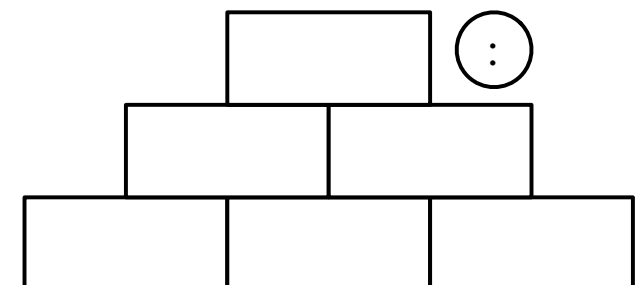
Umkehraufgabe



Problemumkehr

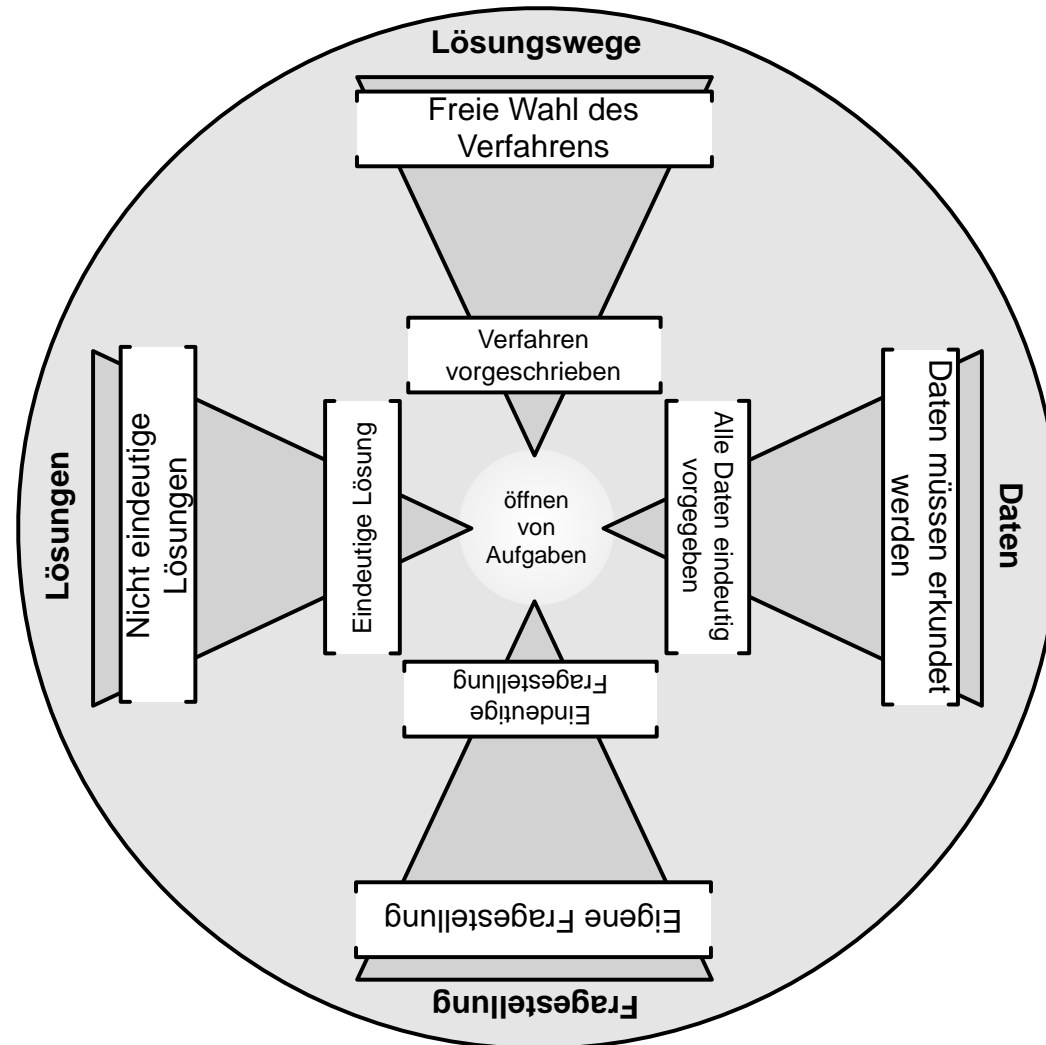


Anwendungssuche



*nach Bruder, zitiert nach: Büchter, Leuders: Mathematikaufgaben selbst entwickeln, Cornelsen - Scriptor, 2005

Öffnungsgrade von Aufgaben - eine „Drehscheibe“ zum analysieren:



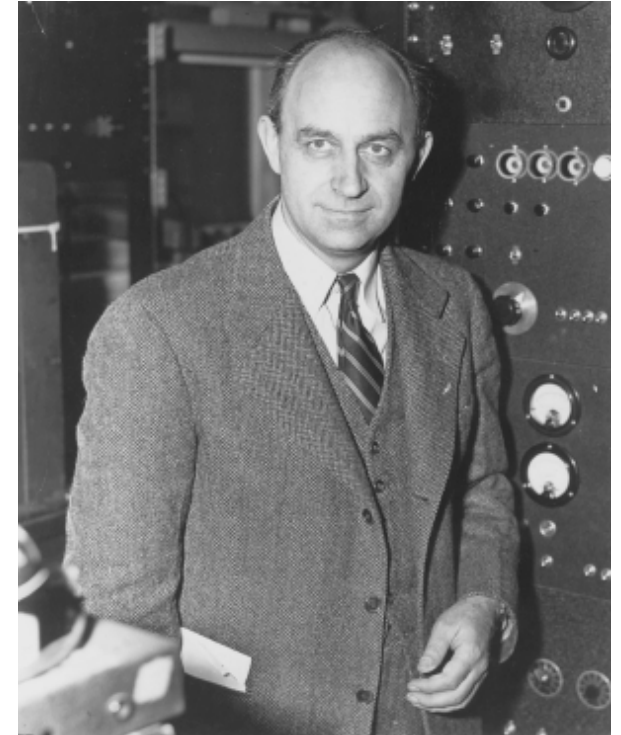
Enrico Fermi

(* 29. September 1901 in Rom, Italien; † 28. November 1954 in Chicago, USA),

war einer der bedeutendsten Kernphysiker des 20. Jahrhunderts. 1938 erhielt er den Nobelpreis für Physik.

Ihm gelang am 2. Dezember 1942 (15:25 Uhr) an der University of Chicago mit dem Kernreaktor Chicago Pile No. 1 erstmals eine kritische Kernspaltungs-Kettenreaktion [...].

Im Sommer 1944 zog Fermi mit seiner Familie nach Los Alamos (New Mexico) in das geheime Atom-Forschungslabor der USA. Als Berater von Robert Oppenheimer spielte Fermi eine wichtige Rolle bei Entwicklung und Bau der ersten Atombomben. [...]



Fermi war für seine schnellen Abschätzungen und seine physikalische Intuition bekannt – er war ein Meister der „back of the envelope“-Rechnungen (die nicht mehr Platz als die Rückseite eines Briefkuverts benötigen). Sprichwörtlich sind auch die *Fermi questions* (*Fermi-Probleme*), wie etwa aus wenigen Daten die Anzahl der Klavierstimmer in einer Stadt wie Chicago abzuschätzen.

Die Fermi-Box

Unsere Schule A 8

Masse in der Klasse

- Wie viel wiegen alle Schülerinnen und Schüler deiner Schule zusammen?



A close-up photograph of a white scale with black markings. The number '500' is clearly visible, and the word 'Gramm' is printed in orange below it. The scale is slightly curved, and the background is dark.

Berufe F 1

Der Bus kommt

- Wie viele Kilometer im Jahr fährt ...
 - ein Busfahrer, eine Busfahrerin?
 - ein Taxifahrer?
 - ein LKW-Fahrer?
 - eine Streifenpolizistin?



A photograph of a white and blue toy bus on a black track. The bus is positioned on a white surface, and the track is visible in the foreground. The bus has a white roof and blue accents on the front and sides.

Ein Beispiel

Addiere drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Was fällt Dir auf?

Vermutung: Die Summe ist stets durch 3 teilbar.

Lösungen: (Auswahl)

- Die Summe ist stets das 3-fache des mittleren Summanden, da sich erster und dritter Summand entsprechend ergänzen
- $(n - 1) + n + (n + 1) = 3 \cdot n$

Mögliche Variationen: (Auswahl)

- Addiere zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Was ...?
- Addiere vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. ...
- Addiere ungerade viele aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.
- Addiere drei aufeinanderfolgende gerade Zahlen.
- Addiere drei aufeinanderfolgende Quadratzahlen.
- ...

