Hauptseminar 31

Fachdidaktik Mathematik

Bruchrechnung

Heinz-Jürgen Harder

Fachleiter für Mathematik

Januar 2012

Heinz-Jürgen Harder

Sachanalyse

Die Peano-Axiome der Natürlichen Zahlen

Die *Natürlichen Zahlen* beruhen auf einem Axiomensystem, das nach dem italienischen Mathematiker *Giuseppe Peano* (*1858 ; †1932 in Turin) benannt wurde.

Die ersten vier *Peano-Axiome* lauten vereinfacht:

1. $1 \in \mathbb{N}$
2. $n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad n+1 \in \mathbb{N}$
3. $n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad n+1 \neq 1$
4. $m, n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad (m+1 = n+1 \quad \Rightarrow \quad m = n)$

Ein fünftes Axiom ist das sogenannte *Induktionssaxiom*, welches besagt:
„Enthält eine Menge X die 1 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger $n{+}1$, so bilden die *Natürlichen Zahlen* eine Teilmenge von X."

Peano hat später auch die Null zu den *Natürlichen Zahlen* genommen. Heute wird hierfür meist das Symbol $\mathbb{N}_0$ benutzt.

Heinz-Jürgen Harder

Verknüpfungen (Rechenregeln) innerhalb der Natürlichen Zahlen

Innerhalb der *Natürlichen Zahlen* sind die zwei *Verknüpfungen* „+“ und „·“ definiert.

Für beide Verknüpfungen gelten ...

... das Assoziativgesetz:

$$a, b, c \in (\mathbb{N}; +) \quad \Rightarrow \quad a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a, b, c \in (\mathbb{N}; \cdot) \quad \Rightarrow \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

... das Kommutativgesetz:

$$a, b \in (\mathbb{N}; +) \quad \Rightarrow \quad a + b = b + a$$

$$a, b \in (\mathbb{N}; \cdot) \quad \Rightarrow \quad a \cdot b = b \cdot a$$

Man nennt daher auch die Zahlenmenge mit den jeweiligen Verknüpfungen eine *kommutative Halbgruppe*.

Heinz-Jürgen Harder

Erste Erweiterung der Natürlichen Zahlen

Innerhalb der natürlichen Zahlen können Rechenoperationen durchgeführt werden, allerdings stößt man an eine Grenze bei der Lösung der Gleichung:

$$x + n = 0; \quad n \in \mathbb{N}$$

Zwar sind alle Koeffizienten der Gleichung Elemente aus $\mathbb{N}_0$, jedoch gibt es keine Lösung der Gleichung in $\mathbb{N}_0$.

Die Notwendigkeit der Lösung dieser Gleichung führt zur Erweiterung des Zahlbereichs auf den Bereich der *Ganzen Zahlen*:

$$\boxed{\mathbb{Z} = \{x : x \in \mathbb{N}_0 \vee -x \in \mathbb{N}_0\}}$$

Es werden also die natürlichen Zahlen mit der Null um die *negativen Zahlen* erweitert.

Verknüpfungen (Rechenregeln) innerhalb der Ganzen Zahlen

Für die ganzen Zahlen mit der Verknüpfung „+“ gilt:

$$1.\quad a, b \in (\mathbb{Z};+) \quad \Rightarrow \quad a+b \in (\mathbb{Z};+)$$ Abgeschlossenheit

$$2.\quad a, b, c \in (\mathbb{Z};+) \quad \Rightarrow \quad (a+b)+c = a+(b+c)$$ Assoziativgesetz

$$3.\quad a \in (\mathbb{Z};+) \quad \Rightarrow \quad a+0 = 0+a = a$$ neutrales Element

$$4.\quad \forall a \in (\mathbb{Z};+) \quad \exists a' \in (\mathbb{Z};+) \quad \Rightarrow \quad a+a' = 0$$ inverses Element

Dies sind die *Gruppenaxiome*, d.h die ganzen Zahlen bilden bezüglich der Addition eine *Gruppe*.
Da die Addition auch *kommutativ* ist, nennt man sie eine *kommutative Gruppe* oder auch *abelsche Gruppe* (nach dem norwegischen Mathematiker *Niels Henrik Abel* (*1802; †1829))

$(\mathbb{Z}\,;+)$ bildet eine (kommutative) Gruppe.

$(\mathbb{Z}\,;\cdot)$ bildet weiterhin eine Halbgruppe (Es gibt keine inversen Elemente).

$(\mathbb{Z}\,;+\,;\cdot)$ bildet daher einen *algebraischen Ring*.

Zweite Erweiterung, die Rationalen Zahlen

Innerhalb der Ganzen Zahlen können weitergehende Rechenoperationen durchgeführt werden, allerdings stößt man wieder an eine Grenze bei der Lösung der Gleichung:

$$a \cdot x + b = 0; \quad a, b \in \mathbb{Z}; \quad a \neq 0 \quad \wedge \quad a \nmid b$$

Zwar sind alle Koeffizienten der Gleichung Elemente aus $\mathbb{Z}$, jedoch gibt es keine Lösung der Gleichung in $\mathbb{Z}$.

Die Notwendigkeit der Lösung dieser Gleichung führt zur Erweiterung des Zahlbereichs auf den Bereich der *Rationalen Zahlen*:

$$\boxed{\mathbb{Q} = \{(a;b) : a \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad b \in \mathbb{N}\}}$$

Es handelt sich bei den *Rationalen Zahlen* also um eine Menge von geordneten *Zahlentupeln* (Zahlenpaaren), wobei $b \neq 0$ ist, da b aus $\mathbb{N}$ stammt.

Heinz-Jürgen Harder

Verknüpfungen (Rechenregeln) innerhalb der Rationalen Zahlen

Auf $\mathbb{Q}$ werden die folgenden beiden Verknüpfungen definiert:

$$(a\,;b) + (c\,;d) := (a \cdot d + b \cdot c\,;b \cdot d)$$

$$(a\,;b) \cdot (c\,;d) := (a \cdot c\,;b \cdot d)$$

Das sind die bekannten Rechenregeln der *Bruchrechnung* und die Zahlenpaare können als die bekannten *Bruchzahlen* angesehen werden.

Eine wichtige Eigenschaft der *Rationalen Zahlen* ist noch die *Äquivalenz* von Elementen in $\mathbb{Q}$:

$$(a\,;b) \sim (c\,;d) \quad :\Leftrightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c$$

Diese Relation ist eine *Äquivalenzrelation*, die die Gesamtmenge der *Rationalen Zahlen* in Teilmengen (*Äquivalenzklassen*) untereinander äquivalenter Elemente zerlegt.

Eine einzelne rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ ist also eine unendliche Menge von geordneten Paaren $(a\,;b)$.

$(\mathbb{Q}\,;+)$ bildet eine (kommutative) Gruppe.

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}\,;\cdot)$ bildet ebenfalls eine (kommutative) Gruppe.

Außerdem gilt das Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall\, a; b; c \in \mathbb{Q}$

$(\mathbb{Q}\,;+\,;\cdot)$ bezeichnet man daher als *algebraischen Körper*.

„http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Rationale_Zahl&oldid=93777134"

Heinz-Jürgen Harder

Abzählbarkeit der natürlichen und der ganzen Zahlen

Alle bisher betrachtete Zahlenmengen sind abzählbar unendliche Mengen.

Für die *Natürlichen Zahlen* ist es trivial, da diese Eigenschaften direkt aus den Axiomen folgen.

Für die anderen Zahlenmengen muss zum Beweis nur gezeigt werden, dass eine *eineindeutige Abbildung* der Menge auf die *Natürlichen Zahlen* existiert..

Für die *Ganzen Zahlen* wird dies durch die Abbildung mit der folgenden Vorschrift erreicht:

$$z : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$$

$$z : \begin{cases} a \mapsto n = 2 \cdot a, & \text{wenn } a \geqq 0 \\ a \mapsto n = -(2 \cdot a + 1), & \text{wenn } a < 0 \end{cases}$$

In einer Tabelle ergibt das die folgende Zuordnung der ersten Elemente:

a	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Bruchrechnung

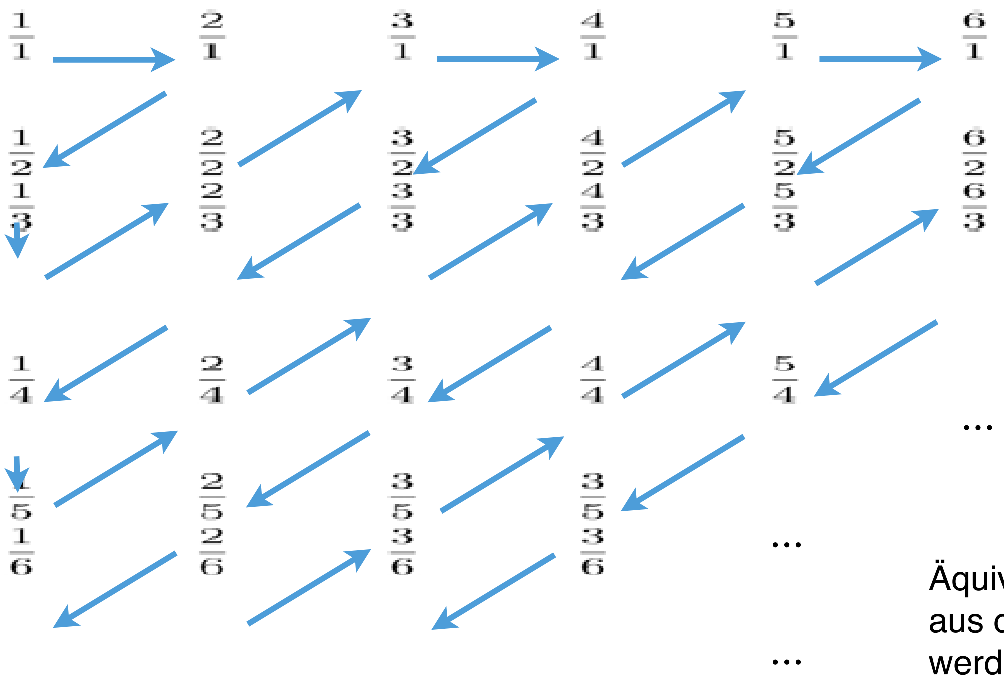
Heinz-Jürgen Harder

Abzählbarkeit der rationalen Zahlen

Auch die Menge der *Rationalen Zahlen* ist abzählbar.

Gezeigt werden kann dies mit dem ersten *Cantor'schen Diagonalverfahren* nach *Georg Cantor* (* 1845; † 1918):

Hierfür wird die Menge der Bruchzahlen in einem Rechteckschema aufgeschrieben und entlang eines diagonal verlaufenden Pfades durchnummeriert:



Äquivalente Bruchzahlen, also Zahlen aus der gleichen Äquivalenzklasse, werden dabei nur einmal gezählt.

Reelle Zahlen

Innerhalb der Rationalen Zahlen können alle wesentlichen Rechenoperationen in der Sekundarstufe I durchgeführt werden. An eine Grenze stößt man erst beim Wurzel ziehen, z.B. bei der Lösung der Gleichung: $x^2 - 2 = 0$

Die Lösungen dieser Gleichung $x = \sqrt{2} \quad \vee \quad x = -\sqrt{2}$
sind keine rationale Zahlen (was durch einen Beweis auch in der Sekundarstufe I gezeigt werden kann).

Dies führt zu der Erweiterung der Rationalen Zahlen auf den Körper der Reellen Zahlen: $(\mathbb{R}; + ; \cdot)$

Komplexe Zahlen

Die Reellen Zahlen bilden den Abschluss der Zahlbereichserweiterungen in der Sekundarstufe I. Allerdings sind auch sie noch nicht bezüglich aller Rechenoperationen Abgeschlossen, da z.B. die Gleichung:

$$x^2 + 1 = 0$$

keine Lösung in $\mathbb{R}$ besitzt.

Erst die Menge der *Komplexen Zahlen* mit der *imaginären Einheit* i ist gegenüber allen Rechenoperationen abgeschlossen.

Mit speziell definierten Operationen + und · bildet sie einen *algebraisch abgeschlossenen Zahlenkörper*. $(\mathbb{C}; + ; \cdot)$

Didaktik

Einige Deutungen von Bruchzahlen:

$$\frac{3}{4}$$

Teil (eines Ganzen): $\frac{3}{4}\,(\text{von } 1)$

Resultat einer Division: $\frac{3}{4} = 3 : 4$

Relativer Anteil: $\frac{3}{4}$ von ...

Verhältnis: $\frac{3}{4} = 3 : 4\,(3 \text{ zu } 4)$

Vergleichsoperator:
$\frac{3}{4}$ mal so viele wie ...

Quasikardinalzahl: $\frac{3}{4} = 3\,\text{Viertel}$

Absoluter Anteil: $\frac{3}{4}$ ... drei von vier

Quasiordinalzahl: $\frac{1}{4}$ ... jeder Vierte

*) nach: Günther Malle. Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *mathematik lehren*, (123), 2004.

Einige Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen von Bruchzahlen:

Erweitern und Kürzen

$\frac{1}{2}$ — *Verfeinerung* der Einteilung → $\frac{2}{4}$

$\frac{1}{2}$ ← *Vergröberung* der Einteilung — $\frac{2}{4}$

Addition und Subtraktion von Bruchzahlen

Zusammenfügen, Hinzufügen ← **Addieren**

Subtrahieren → Wegnehmen

Addieren → Vorwärtsbewegen, Vorwärtsschreiten (z.B. in *Fünftelschritten*)

Subtrahieren → Rückwärtsbewegen, Rückwärtsschreiten (z.B. in *Fünftelschritten*)

*) nach: Günther Malle. Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *mathematik lehren*, (123), 2004.

Heinz-Jürgen Harder

Einige Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen von Bruchzahlen:

Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einer Bruchzahl

Abgekürzte Addition: $\frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \longleftarrow 3 \cdot \frac{4}{5}$

$\frac{4}{5} \cdot 3 \longrightarrow$ Von-Deutung: $\frac{4}{5} \text{ von } 3$

Multiplikation von Bruchzahlen

Von-Deutung: $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \text{ von } \frac{5}{7}$

Von den beiden vorher besprochenen Grund-vorstellungen lässt sich nur die Von-Deutung aufrecht erhalten.

Division von Bruchzahlen

$\frac{4}{9} : 2 \longrightarrow$ Teilen (Verteilen); $\frac{4}{9} : 2 \longrightarrow$ Messen (Aufteilen)

$\frac{7}{2} : \frac{7}{10} \longrightarrow$ Messen (Aufteilen)

*) nach: Günther Malle. Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *mathematik lehren*, (123), 2004.

Heinz-Jürgen Harder

Bremer Bildungsplan

Bruchrechnung

Heinz-Jürgen Harder

Ende Klasse 6:

Arithmetik / Algebra – mit Zahlen und Symbolen umgehen	
Die Schülerinnen und Schüler...	
Darstellen	• ... • deuten Schaubilder, Dezimalzahlen und Prozente als eine Darstellungsform für *Brüche* und wandeln sie in die jeweils andere Darstellungsform um.
Beschreiben	• beschreiben Anteile, relative Anteile (auch Anteile von Anteilen), Größen und Quotienten durch *Brüche*, • finden durch Vergröbern und Verfeinern gleichwertige Brüche und nutzen Kürzen und Erweitern als formalen Weg zum Finden gleichwertiger Brüche, • beschreiben Vorgänge des immer genaueren Messens durch Dezimalzahlen, • ...
Ordnen	• ordnen und vergleichen natürliche, negative Zahlen, *einfache Brüche* und *Dezimalzahlen*
Operieren	• runden natürliche Zahlen und *Dezimalzahlen* und führen Überschlagsrechnungen durch, • führen Grundrechenarten für natürliche Zahlen und *Dezimalzahlen* aus (Kopfrechnen und schriftliche Rechenverfahren, in einfachen Fällen auch mit zweistelligen Divisoren) und nutzen Strategien für Rechenvorteile, • *addieren und subtrahieren einfache Brüche*, *multiplizieren Brüche mit natürlichen Zahlen*, addieren, subtrahieren, multiplizieren *Dezimalzahlen*, dividieren *Dezimalzahlen* durch natürliche Zahlen.
Anwenden	• ... • untersuchen und beschreiben Muster und Beziehungen bei Zahlen, • untersuchen Eigenschaften von Zahlen, erkennen dabei *Primzahlen* und nutzen *Teilbarkeitsregeln* (2; 3; 5; 10; 25).

Heinz-Jürgen Harder

Ende Klasse 8:

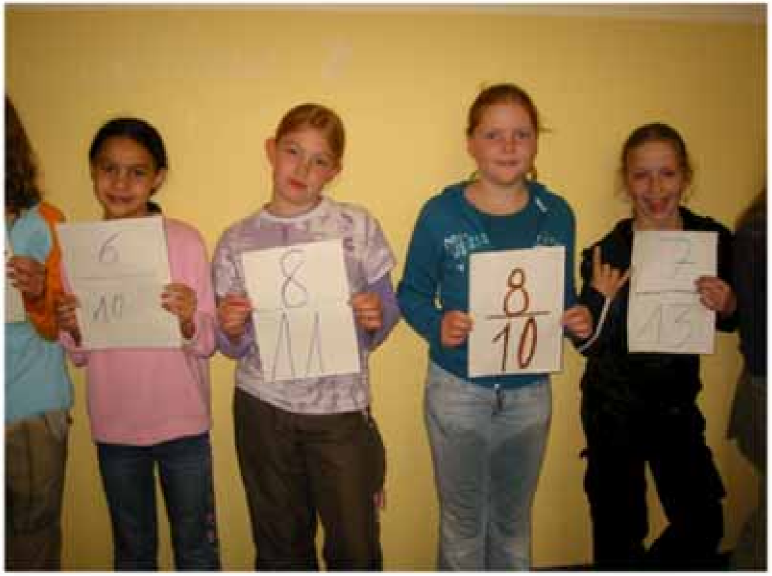
Arithmetik / Algebra – mit Zahlen und Symbolen umgehen		
	Grundlegendes Anforderungsniveau	**Erweitertes Anforderungsniveau**
Die Schülerinnen und Schüler...		
Ordnen	• ordnen und vergleichen *rationale Zahlen*,	
Beschreiben	• beschreiben Verhältnisse durch *Brüche*, • ...	
Operieren	• *multiplizieren Brüche* und *dividieren Brüche* durch *natürliche Zahlen*, • führen Grundrechenarten aus für *rationale Zahlen* (wie sie im Alltag vorkommen),	• *multiplizieren und dividieren Brüche*, • führen Grundrechenarten für *rationale Zahlen* aus,
	• führen verständig Berechnungen mit dem Taschenrechner durch, • ...	
	• ...	• ...
Anwenden	• verwenden ihre Kenntnisse über *rationale Zahlen* zum Lösen inner- und außermathematischer Probleme.	• verwenden ihre Kenntnisse über *rationale Zahlen* und lineare Gleichungen zum Lösen inner- und außermathematischer Probleme.

Konkreter Unterricht

Bruchrechnung

Heinz-Jürgen Harder

Bruchzahlen ordnen:



1. Schritt:

Jede Schülerin und jeder Schüler schreibt eine Bruchzahl (eventuell mit vorgegebenen Nenner bzw. Nennerbereich) groß auf ein DIN A 4 Blatt.

2. Schritt:

Die Schülerinnen und Schüler stellen sich nebeneinander auf. Hierbei kann z.B. schon auf eine Sortierung (links kleine, rechts große Zahlen) geachtet werden.

3. Schritt:

Eine endgültige (perfekte?) Sortierung kann mit dem *Bubblesort*-Verfahren hergestellt werden:

Die Reihe wird in aufsteigender Richtung durchlaufen. Dabei werden immer zwei benachbarte Zahlen betrachtet. Wenn sie in falscher Ordnung stehen, werden sie vertauscht. Am Ende steht die größte Zahl der Reihe.

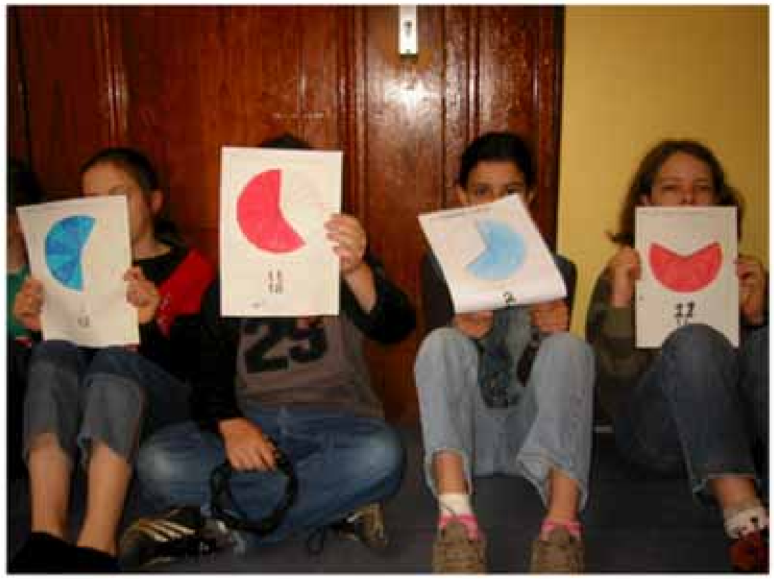
Der oben genannte Schritt wird solange wiederholt, bis die Reihe komplett sortiert ist. Dabei muss die letzte Zahl des vorherigen Durchlaufs aber nicht mehr betrachtet werden, da sie ihre endgültige Position schon gefunden hat.

Hierbei steigen die größeren Zahlen wie Blasen (*bubbles*) im Wasser (daher der Name) immer weiter nach oben.

(Von „http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Bubblesort&oldid=96280677“)

Januar 2012

Bruchzahlen ordnen:



4. Schritt:

Jede Schülerin und jeder Schüler bekommt ein Blatt mit einer entsprechend das Nenners geteilten Kreisscheibe und markiert den Bruch farbig.

5. Schritt:

Die Schülerinnen und Schüler stellen sich nun mit den visualisierten Brüchen nebeneinander auf. Auch jetzt kann schon auf eine Sortierung (links kleine, rechts große Zahlen) geachtet werden.

6. Schritt:

Eine endgültige (perfekte?) Sortierung kann mit dem *Bubblesort*-Verfahren hergestellt werden, wobei die beiden Bruchzahlen jetzt visuell (z.B. durch übereinanderlegen) verglichen werden können.

7. Schritt:

Diese Sortierung wird mit der ursprünglichen Sortierung verglichen und bewertet.

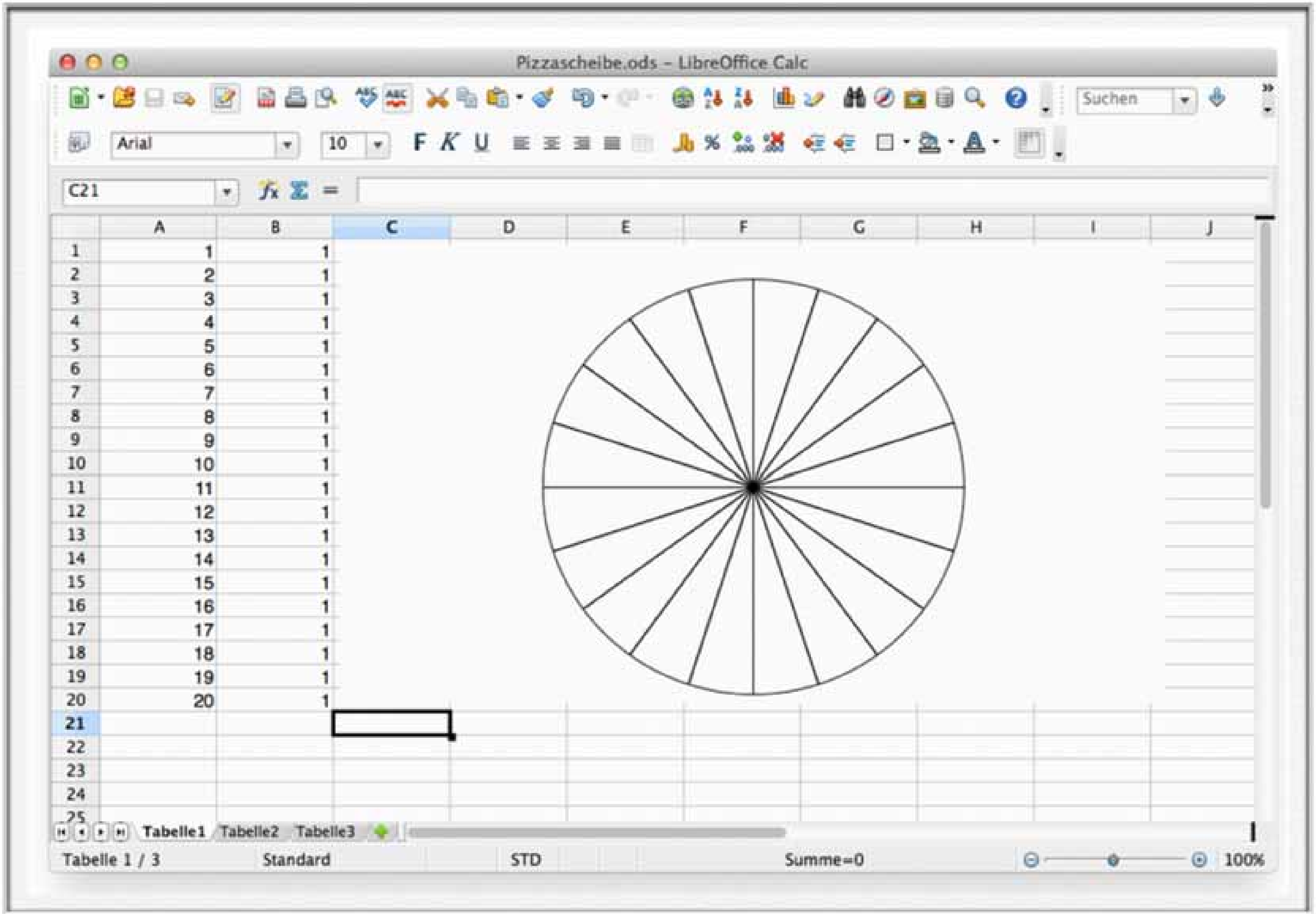
Konkreter Unterricht

Beispiele

Bruchrechnung

Heinz-Jürgen Harder

Herstellen von Kreisdiagrammen:



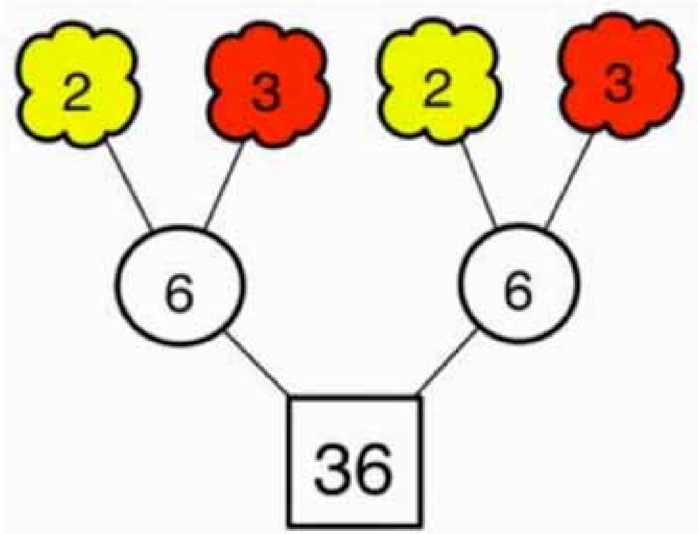
Januar 2012

Bruchrechnung

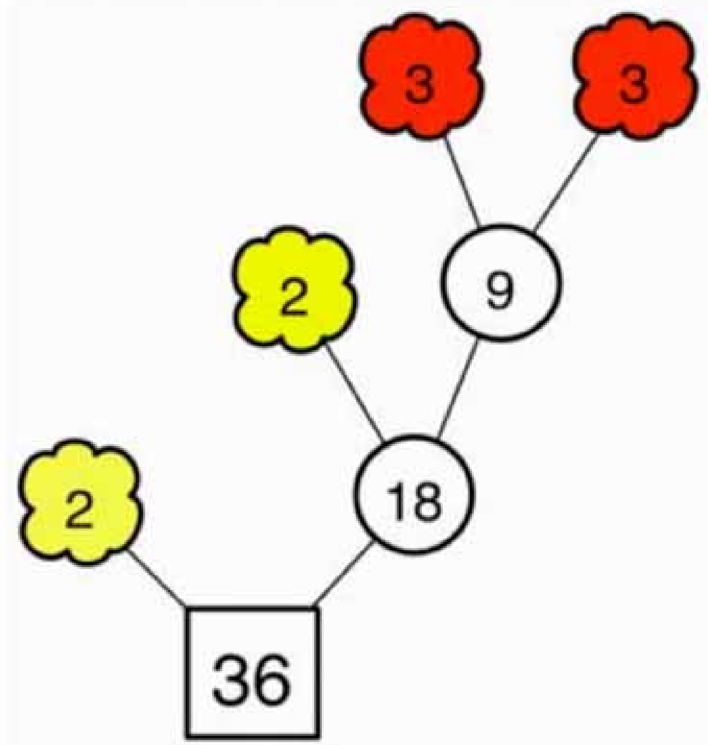
Heinz-Jürgen Harder

Zerlegung in Primteiler:

Um eine Zahl in Primteiler aufzuteilen, kann man die Teiler aus der Zahl wie die Äste eines Baumes oder einer Blume wachsen lassen. Dabei gibt es verschiedene Möglichkeiten wie die Blüten (die Primteiler) aus den Teilern entstehen:



Hier ist die 36 in 6·6 aufgeteilt worden und danach wurde jede 6 in die Primzahlen 2·3 zerlegt.



Hier wurde die 36 in 2·18 zerlegt, wobei 2 schon eine Primzahl ist. Die 18 wurde in 2·9 und die 9 in 3·3 zerlegt.

In beiden Fällen erhält man die Zerlegung: $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

Literatur

[Hefendehl-Hebeker und Prediger 2006] Hefendehl-Hebeker, Lisa ; Prediger, Susanne: Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern - Zahlvorstellungen wandeln. In: *Praxis der Mathematik* 48 (2006), Oktober, Nr. 11, S. 1 – 7

[Malle 2004a] Malle, Günther: Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. In: *mathematik lehren* (2004), April, Nr. 123, S. 4 – 8

[Malle 2004b] Malle, Günther: Schülervorstellungen zu Bruchzahlen und deren Rechenoperationen. In: *mathematik lehren* (2004), April, Nr. 123, S. 20 – 22

[Meyer 2010] Meyer, Stefan: Das Halbespiel - eine ganze Sache: Darstellungen und Operationen mit Bruchzahlen am Zahlenstrahl spielerisch erfahren. In: *Praxis der Mathematik* 52 (2010), April, Nr. 32, S. 9 – 13

[Padberg 2009] Padberg, Friedhelm: *Didaktik der Bruchrechnung*. Spektrum Akademische Verlagsanstalt, 2009

[Prediger 2004] Prediger, Susanne: Brüche bei den Brüchen - aufgreifen oder umschiffen? In: *mathematik lehren* (2004), April, Nr. 123, S. 10–13

[Prediger 2006] Prediger, Susanne: Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben- Vorschläge für vorstellungsorientierte Zugänge und diagnostische Aufgaben. In: *Praxis der Mathematik* 48 (2006), Oktober, Nr. 11, S. 8 – 12

[Ulovec 2007] Ulovec, Andreas: Wenn sich Vorstellungen Wandeln - Ebenen der Zahlbereichserweiterungen. In: *mathematik lehren* (2007), Juni, Nr. 142, S. 14 – 16

[Winter 2004] Winter, Heinrich: Ganze und zugleich gebrochene Zahlen. In: *mathematik lehren* (2004), April, Nr. 123, S. 14 – 18

[Wittmann 2007] Wittmann, Gerald: Mit Bruchzahlen Experimentieren: Darstellungen wechseln - Grundvorstellungen entwickeln. In: *mathematik lehren* (2007), Juni, Nr. 142, S. 17 – 21